رایانش کوانتومی – جبر خطی

گزارشی از محسن هوشمند

از آقایان جواد اصغری و مسیح حاج‌سعیدی بابت مطالعه و تصحیح متن تشکر می‌کنم.

مطالب قبلی پایه‌های ریاضی مطالب فعلی و ادامه

آشنایی شهودی و مکاشفه‌ای با کوانتوم

اکنون آشنایی اصلی

مرور-

- چند کلمه درباره انگیزه‌های مکانیک کوانتوم
- حالت‌های کوانتومی و تمیزپذیری آنها از یکدیگر حین مشاهده
- کمیت‌های فیزیکی مشاهده‌پذیر در چارچوب کوانتوم
- چگونگی اندازه‌گیری کمیت‌های مشاهده‌پذیر
- دینامیک سیستم‌های کوانتومی (تطور آنها در زمان)
- ضرب تنسوری و روش اسمبل سیستم‌های کونتومی بزرگتر از سیستم‌های کوچکتر
- درهم‌تنیدگی

جبر خطی

اعداد مختلط

اعداد مختلط اساس مکانیک کوانتوم است و تبعا در رایانش کوانتومی نیز نقشی بنیادی دارد. اعداد طبیعی مثبت، اعداد طبیعی، اعداد حسابی، اعداد صحیح، اعداد گویا، و اعداد حقیقی مجموعه‌های مهم کار با اعداد هستند. اما لزوما برای حل و یافتن ریشه معادلات چندجمله‌ای پاسخی را عرضه نمی‌کنند. به دیگر سخن، بسته نیستند. از طرف دیگر، عدد مختلط ریشه در پاسخ جبری معادلات چندجمله‌ای دارد. مشخص می‌شود که بعضی از معادلات جواب حقیقی ندارند. مثلا

$$x^۲ + ۱ = ۱$$

هیچ پاسخی جهت معادله فوق در مجموعه‌های تعریف شده وجود ندارد. فرض می‌کنیم جواب دارد و مربع آن برابر با ۱− است. یا

$$i = \sqrt{-۱} \text{ یا } i^۲ = -۱$$

هر چند که می‌دانیم چنین اعدادی وجود ندارند، ولی فعلا برای خوانندگان در پیشبرد مباحث مسئله‌ای نیست و آن‌ها را فرض می‌کنیم.

$$i^۳ = \cdots = -\mathrm{i}$$

$\mathrm{i}^{۱۵}$؟

اعداد موهومی را i با ضریبی از اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در نتیجه، عدد مختلط جمع عدد حقیقی با عدد موهومی است. تعریف عدد مختلط به صورت زیر است.

$$\mathrm{c} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$$

a وb دو عدد حقیقی هستند که a بخش حقیقی و b بخش موهومی عدد c هستند. جمع و ضرب دو عدد مختلط را در قالب مثالی ببینید.

$,d = 1 + ۴ic = ۳ - i$

$c + d = ۴ + ۳i$

$c \times d = ۷ + ۱۱i$

تمرین- جمع و ضرب دو عدد مختلط $\mathrm{c} = -۳ + \mathrm{i}$ و $\mathrm{d} = ۲ - ۴\mathrm{i}$ را حساب کنید.

اعداد مختلط جهت پاسخ داشتن تمامی معادلات چندجمله‌ای کفایت می‌کنند.

قضیه: هر معادله چندجمله‌ای از تک متغیر با ضرائب مختلط دارای پاسخی مختلط است.

مثال- $-۱ + \mathrm{i}$ پاسخ $x^۲ + ۲x + ۲ = 0$ است؟ پاسخ دیگری دارد؟

تمرین- برنامه قبول دو عدد مختلط و جمع و ضرب آنها را بنویسید.

می‌توان عدد مختلط را با زوج مرتب نمایش داد، یا c:(a,b). پس نمایش عدد حقیقی a:(a,0) و نمایش عدد موهومی (0,b) است.

مثلا i را می‌توان به صورت $i: (0,۱)$ نمایش داد.

پس جمع $(a۱, b۱) + (a۲, b۲) = (a۱ + a۲, b۱ + b۲)$

ضرب $(a۱, b۱) \times (a۲, b۲) = (a۱a۲ - b۱b۲ + a۱b۲ + a۲b۱)$

ضرب i در خودش $i \times i = (0,۱) \times (0,۱) = (0 - ۱,0 + 0) = (-۱,0)$

به این ترتیب می‌توان عدد مختلط را به صورت زیر نوشت:

$$c = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0,۱) = a + bi$$

مثال$\mathrm{c}: (۳, -۲)$ و $\mathrm{d}: (۱,۲)$

$$c \times d = (۳ \times ۱ - (-۲) \times ۲, -۲ \times ۱ + ۲ \times ۳) = (۳ + ۴, -۲ + ۶) = (۷,۴) = ۷ + ۴i$$

دارای خواص جابجاپذیری است:

- $\mathrm{c + d = d + c}$
- $c \times d = d \times c$

شرکت‌پذیری

- $(c_۱ + c_۲) + c_۳ = c_۱ + (c_۲ + c_۳)$
- $(c_۱ \times c_۲) \times c_۳ = c_۱ \times (c_۲ \times c_۳)$

توزیع ضرب به جمع

- $c_۱ \times (c_۲ + c_۳) = c_۱ \times c_۲ + c_۱ \times c_۳$

تمرین—گزاره را ثابت کنید.

پیمانه یا اندازهٔ عدد مختلط $|c| = |a + bi| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$.

اثبات کنید: $|c_۱c_۲| = |c_۱||c_۲|$ و $|c_۱ + c_۲| \leq |c_۱| + |c_۲|$.

مزدوج عدد مختلط: تغییر علامت بخش موهومی عدد مختلط است. پس $c = a + bi$ دارای مزدوج مختلط $\bar{c} = a - bi$.

تمرین- اثبات کنید:

$$\overline{c_۱} + \overline{c_۲} = \overline{c_۱ + c_۲}$$

$$\overline{c_۱} \times \overline{c_۲} = \overline{c_۱ \times c_۲}$$

تابع $c \to \bar{c}$ یک به یک و پوشا است.

یک‌ریختی (ایزومورفی) میدان: تابعی از میدانی به میدان دیگر که یک به یک و پوشاست و جمع و ضرب را حفظ می‌کند.

پس تابع مزدوجْ تابع ایزوموفی میدان از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ است که مزدوج هر عدد مختلط را که خود عددی مختلط است بدست می‌آورد.

پیمانهٔ عدد مختلط با ضرب عدد مختلط در مزدوجش است. $c \times \bar{c} = |c|^۲$

عملیات تفریق به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$c_۱ - c_۲ = (a_۱, b_۱) - (a_۲, b_۲) = (a_۱ - a_۲, b_۱ - b_۲)$$

تقسیم

$$(x, y) = \frac{(a_۱, b_۱)}{(a_۲, b_۲)}$$

$$(x, y)(a_۲, b_۲) = (a_۱, b_۱) \Longrightarrow \begin{cases} a_۱ = a_۲x - b_۲y \\ b_۱ = a_۲y + b_۲x \end{cases}$$

ضرب دو معادله در ضرایب ثابت متقابل a۱ و b۲

$$\begin{cases} a_۱a_۲ = a_۲^۲x - b_۲a_۲y \\ b_۱b_۲ = a_۲b_۲y + b_۲^۲x \end{cases}$$

جمع دو معادله بالا

$$a_۱a_۲ + b_۱b_۲ = (a_۲^۲ + b_۲^۲)x \Longrightarrow x = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{(a_۲^۲ + b_۲^۲)}$$

ضرب دو طرف معادله نخستین با b۲ و a۲− و اجرا عملیات مشابه

$$y = \frac{a_۲b_۱ - a_۱b_۲}{(a_۲^۲ + b_۲^۲)}$$

سخن کوتاه

$$\frac{a۱ + b۱i}{a۲ + b۲i} = \frac{a_۱a_۲ + b_۱b_۲}{(a_۲^۲ + b_۲^۲)} + \frac{a_۲b_۱ - a_۱b_۲}{(a_۲^۲ + b_۲^۲)}i$$

تمرین تقسیم و جمع بسته است؟

مثال- $c = ۳i$ و $d = -۱ - i$، در نتیجه $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ را حساب کنید. جواب i

مثال- $c = -۲ + i$ و $d = ۱ + ۲i$، نتیجه $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ را حساب کنید

عضو خنثی جمع $\mathrm{c} + (0{,}0) = (0{,}0) + \mathrm{c} = \mathrm{c}$

عضو خنثی ضرب $\mathrm{c} \times (۱{,}0) = (0{,}۱) \times \mathrm{c} = \mathrm{c}$

سخن کوتاه مجموعه و با عملیات‌های

i- جمع دارای خواص جابجاپذیری و شرکت‌پذیری
ii- ضرب دارای خواص جابجاپذیری و شرکت‌پذیری
iii- عضو خنثی جمع (0,0)
iv- عضو خنثی ضرب (۱,0)
v- توزیع ضرب نسبت به جمع
vi- تفریق بسته
vii- تقسیم بسته به جز در مخرج برابر صفر

به «میدان» معروف است. در بخش‌های بعد تعریف دقیق‌تر را بدست خواهیم داد.

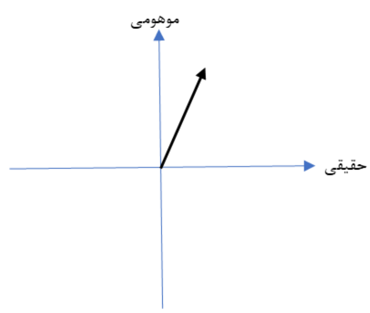
در نتیجه $\mathbb{C}$ همانند $\mathbb{R}$ نوعی از میدان است. مورد متاخر میدان حقیقی و مورد متقدم میدان عدد مختلط است. $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ است.

میدان جبری کامل: پاسخ معادلات چندجمله‌ای در میدان موجود باشد. پس میدان مختلط دارای این خاصیت است ولی میدان حقیقی چنین خاصیتی ندارد.

تمرین- برنامه تقسیم و تفریق، و مزدوج و پیمانه را پیاده کنید.

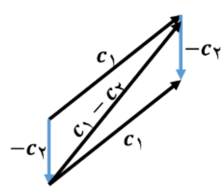
هندسه اعداد مختلط

می‌توان تفسیری هندسی از اعداد مختلط داشت. اعداد مختلط را می‌توان در صفحه‌ای با نام صفحه مختلط نمایش داد که محور افقی بخش حقیقی و محور عمودی بخش موهومی عدد را نمایش می‌دهد. حال زوج مرتب عدد مختلط نمایش دکارتی آن عدد در صفحه مذکور است. با اتصال مبدا به نقطه متناظر با عدد مختلط به حصول برداری منجر می‌شود. اندازه بردار برابر با پیمانه عدد مزبور است.

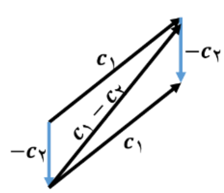


پیمانه همان اندازه بردار است. مثلا، $c = ۳ + ۴i$: طول آن $۵ = \sqrt{۲۵} = \sqrt{۱۶ + ۹} = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = |c|$ است.

جهت جمع اعداد مختلط می‌توان بنابر تفسیر هندسی از روابط برداری استفاده کرد. جمع بردارها با قاعده مشهور به قاعده متوازی الاضلاع است. پس جمع دو عدد مختلط برابر قطر چهارضلعی است.



تمرین- تفریق چگونه است؟



امکان نمایش قطبی

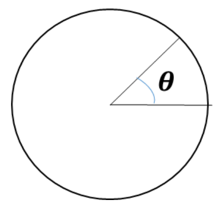
نمایش هندسی امکان دیگری در اختیار می‌دهد تا اعداد مختلط را با مختصات قطبی نمایش داد. نمایش قطبی در دو بعد با اندازه و زاویه تعریف می‌شود که جهت اعداد مختلط آنها را با پیمانه ρ و زاویه θ نمایش می‌دهیم. در نتیجه هر زوج مرتب دکارتی عدد مختلط را با صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$(\mathrm{a},\mathrm{b}) \rightarrow (\rho,\theta)$$

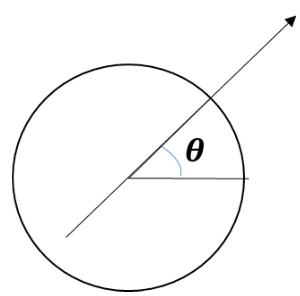
$$\rho = \sqrt{\mathrm{a}^{۲} + b^{۲}}, \theta = \tan^{-۱}\frac{b}{a}$$

تمرین- برنامه تبدیل مختصات دکارتی عدد مختلط به نمایش قطبی و بالعکس را بنویسید.

سوال: شهود نمایش قطبی: اندازه را روی بردار واحد در نظر می‌گیریم.



زاویه تتا زمان را می‌گوید و در فیزیک و مهندسی زمان را با فاز می‌شناسیم و اندازه را بزرگی می‌خوانیم. سخن کوتاه، عدد مختلط اندازه (بزرگی) و فاز است. اعداد حقیقی مثبت صرفا اعداد مختلطی هستند که فاز آنها صفر است. مقادیر حقیقی منفی دارای فاز π است. اعداد موهومی دارای فاز $\frac{\pi}{۲}$ و اعداد موهومی منفی دارای فاز $\frac{۳\pi}{۲}$ است. کما اینکه شکل زیر نمایش می‌دهد. جهت یک فاز تمام خط دارای همان فاز هستند.



اگر فاز در بین صفر و ۲π تعریف شود، عدد مختلط نمایش قطبی منحصر بفرد خواهد داشت. یا $0 \leq \theta < ۲\pi$

پس $\exists\, k \in \mathbb{Z}: \theta_{۲} = \theta_{۱} + ۲\pi k$ اگر فقط و اگر $\theta_{۱} = \theta_{۲}$. دو عدد مختلط در نمایش قطبی یکسان هستند اگر بزرگی آنها یکسان و زاویه آنها به پیمانه ۲π برابر باشد.

مثال- $(۳,\pi)$ و $(۳,-\pi)$ یکسان هستند چون چرا که اندازه یکسان و فاز آنها با $(-\pi) - \pi = -۲\pi = (-۱)۲\pi$ تفاوت دارد.

مختصات قطبی تسهیلاتی را در اختیار می‌نهد. به ضرب دو عدد مختلط با نمایش قطبی توجه کنید. $(\rho_{۱},\theta_{۱})(\rho_{۲},\theta_{۲}) = (\rho_{۱}\rho_{۲},\theta_{۱} + \theta_{۲})$

مثال $c_{۱} = ۱ + \mathrm{i}$ و $c_{۲} = -۱ + \mathrm{i}$

$$c_{۱}c_{۲} = (۱ + \mathrm{i})(-۱ + \mathrm{i}) = -۲ + 0\mathrm{i} = -۲$$

نمایش قطبی

$c_۱ = \left(\sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴}\right)$ و $c_۲ = \left(\sqrt{۲}, \frac{۳\pi}{۴}\right)$ انجام عملیات

$$c_۱ c_۲ = \left(\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}, \frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴}\right) = (۲, \pi)$$

تبدیل به مختصات قطبی

$$(۲ \times \cos \pi \,, ۲ \times \sin \pi) = (-۲,0)$$

ضرب $c = -۲ - i$ و $c_۲ = -۱ - ۲i$ با هر دو روش

تمرین- معنای ضرب در عدد مختلط در صفحه مختلط چیست؟

$$\frac{c_۱}{c_۲} = \left(\frac{\rho_۱}{\rho_۲}, \theta_۱ - \theta_۲\right)$$

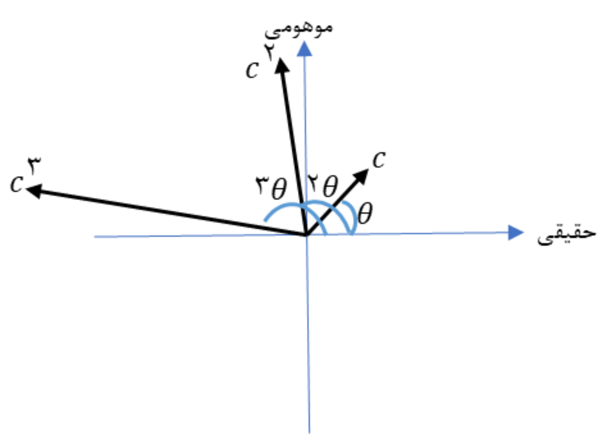
تمرین- تقسیم نمایش قطبی چگونه است؟

تمرین- $(1 + i)^۵$ را به دست آورید.

تمرین- توان n مختصات قطبی؟ $c^n = (\rho^n, n\theta)$ شکل زیر را ببینید.

قضیه دوموار: اگر $c = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ عددی مختلط باشد و $n \in \mathbb{N}$ آن‌گاه $c^n = \rho^n(\cos n\theta + \sin n\theta)$.

$c^n = (\rho^n, n\theta)$ شکل زیر را ببینید



تمرین ریشه n-ام نمایش قطبی. شاید طبق قیاس آن را بتوان به صورت $c^{\frac{۱}{n}} = \left(\rho^{\frac{۱}{n}}, \frac{۱}{n}\theta\right)$ نوشت. اما معادله قبلی کامل نیست. چرا؟ فاز صرفا از ضرایب ۲π است. پس معادله را باید به صورت $c^{\frac{۱}{n}} = \left(\rho^{\frac{۱}{n}}, \frac{۱}{n}(\theta + k۲\pi)\right)$ بازنویسی کرد. در نتیجه به نظر چندین رشته برای یک عدد داریم. ریشه دو رادیکال دو و منفی رادیکال دو است. پس تعداد رشته‌های n-ام برابر n ریشه است. حال معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{۱}{n}(\theta + k۲\pi) = \frac{۱}{n}\theta + \frac{k}{n}۲\pi$$

با تغییر k چند پاسخ داریم k=0, 1, …, n-1

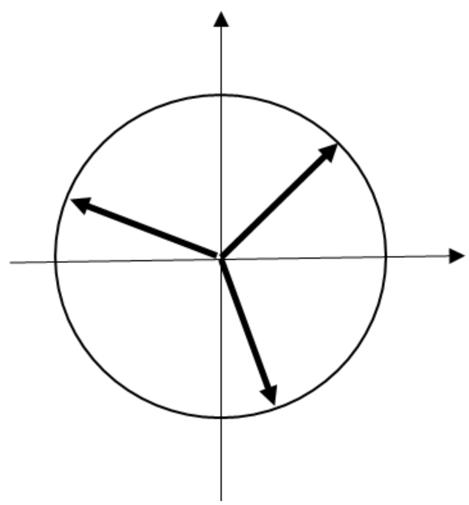
قضیه ریشه n-ام: صورت قطبیِ ریشهٔ عدد مختلط را می‌توان به صورت زیر بدست آورید.

$$c^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = n - ۱$	...	$k = ۱$	$k = 0$
$\frac{۱}{n}\theta + \frac{n-۱}{n}۲\pi$	...	$\frac{۱}{n}\theta + \frac{۱}{n}۲\pi$	$\frac{۱}{n}\theta$

وقتی $k = n$ اولین پاسخ جدول بالا و $k = n + ۱$ پاسخ دوم خواهد شد.

مثال- ریشه n-ام عدد مختلط با نمایش قطبی $(۱, \theta)$ پاسخ رسم دایره واحد و بردارهای آنهایی هستند که با فاز $\frac{۱}{n}\theta$ و جمع $\frac{۱}{n}\theta$ بدست می‌آیند. شکل زیر برای $n = ۳$ است.



مثال- ریشه‌های $c = ۱ + i$ را بدست آورید.

سخن کوتاه، نمایش قطبی به دکارتی $c = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ مشخص می‌کند که هر عدد با نمایش قطبی را می‌توان با مختصات دکارتی متناظر نمایش داد.

معادله اوئلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

اگر تقریب تیلور معادلات را نوشت می‌توان به معادلهٔ بالا رسید.

$$e^{x} = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \cdots + \frac{(-۱)^{n}}{(۲n+۱)!}x^{۲n+۱} + \cdots$$

$$cos(x) = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \cdots + \frac{(-۱)^{n}}{(۲n)!}x^{۲n+۱} + \cdots$$

اگر $\theta = 0$ به عدد واحد می‌رسیم. همچنین

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$
$$+i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2))$$
$$= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

معادله دوموار $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

تمرین- $e^{a+bi} = e^a \times e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$

از نتایج معادله اوئلر امکان تغییر نمایش قطبی $c = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ را به صورت $c = \rho e^{i\theta}$ معروف به صورت نمایی عدد مختلط ممکن می‌کند. در تنیجه می‌توان ضرب عدد مختلط را به صورتی دیگر نمایش داد:

$$c_1\, c_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

تمرین- قاعده تقسیم اعداد مختلط را با صورت نمایی بازنویسی کنید.

نمادگذاری اخیر امکان نگاه دیگری به ریشه‌های عدد مختلط را ممکن می‌کند عدد $1 + 0i = (1,0) = 1$ و n را در نظر می‌گیریم. n ریشه متفاوت واحد به صورت زیر است.

$$c^{\frac{1}{n}} = (1,0)^{\frac{1}{n}} = \left(1^{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n}(0 + 2k\pi)\right) = (1, \frac{2k\pi}{n})$$

$k = 0,1,2,\dots,n-1$ خواهد بود. اگر $k=n$ به پاسخ اول برمی‌گردد. ریشهٔ k-ام $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$ است. پس ریشه‌های واحد را به صورت $\omega_n^0 =$ $1, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ نمایش می‌دهیم. تفسیر هندسی n ریشه تقسیم دایره واحد به n برش با آغاز از $(1,0)$ است.

ضرب دو ریشه واحد $\omega_n^i\omega_n^k = e^{\frac{2\pi i j}{n}}e^{\frac{2\pi i k}{n}} = e^{\frac{2\pi i(j+k)}{n}} = \omega_n^{j+k}$ در نتیجه $\omega_n^j\omega_n^{n-j} = \omega_n^n = 1$ و $\overline{\omega_n^j} = \omega_n^{n-j}$.

تمرین- ریشه‌های پنجم واحد را رسم کنید.

امکان نمایش هندسی هر نوع تابع اعداد مختلط را داریم. چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$$

که ضرایب عدد مختلط هستند. پس تابع را از فضای مختلط به فضای مختلط منتقل می‌کند.

تمرین- معنای هندسی تابع $c \to c^n$ چیست؟ معنای هندسی تابع $c \to c + c_0$ چیست؟

توابع گویا- که به صورت زیر هستند

$$r(x) = \frac{p_0(x)}{p_1(x)} = \frac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0}{d_m x^m + d_{m-1}x^{m-1} + \dots + d_0}$$

تعریف آنها بر صفحه خیلی راحت نیست. یکی از فرم‌های ساده آن را در نظر می‌گیریم $r_{a,b,c,d}(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ضرائب جزو اعداد مختلط هستند و $\mathrm{ad} - \mathrm{bc} \neq 0$ معروف به تبدیل موبیوس است.

تمرین- ضرب و تقسیم عدد مختلط با مختصات قطبی را پیاده کنید.

فضای بردار مختلط $\mathbb{C}^n$

صورت‌گرایی نظریه کوانتوم در فضاهای برداری مختلط انجام می‌گیرد و می‌توان گفت نظریه کوانتوم در چنبرهٔ فضاهای برداری مختلط است. فضای برداری مختلط بر اساس اعداد مختلط هستند. بنابراین در این بخش فضای برداری مختلط را معرفی می‌کنیم. پیش از آن چند مفهوم مرتبط را از جبر مجرد معرفی می‌کنیم تا منظور از فضای بردار مختلط بهتر تبیین شود.

گروه‌ها: گروه‌ها داری نقش مهم در علم رایانه مانند رمزنگاری، نظریه اطلاعات، و گرافیک

تعریف گروه- مجموعه $\mathcal{G}$ و عمل $\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن‌گاه $G \coloneqq (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه است اگر:

i- بسته‌بودن $\forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y \in \mathcal{G}$
ii- شرکت‌پذیری $\forall x, y, z \in \mathcal{G}: (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
iii- عضو خنثی $\exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G}: x \otimes e = e \otimes x = x$
iv- عضو معکوس $\forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x = e$

گروه آبلی

تعریف مجموعه $\mathcal{G}$ و عمل $\otimes: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ تعریفی روی این مجموعه، آن‌گاه $G \coloneqq (\mathcal{G}, \otimes)$ گروه آبلی است اگر:

i- بسته‌بودن $\forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y \in \mathcal{G}$
ii- شرکت‌پذیری $\forall x, y, z \in \mathcal{G}: (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
iii- عضو خنثی $\exists e \in \mathcal{G} \forall x \in \mathcal{G}: x \otimes e = e \otimes x = x$
iv- عضو معکوس $\forall x \in \mathcal{G} \exists y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x = e$
v- جابجاپذیری $\forall x, y \in \mathcal{G}: x \otimes y = y \otimes x$

حلقه: مجموعه و دو عملیات دو مقداری روی مجموعه $(R, +, \cdot)$ اگر

i- جمع جابجاپذیر $(\mathrm{R}, +)$ گروه آبلی با عضو خنثی صفر
ii- ضرب $(R, \cdot)$ خاصیت شرکت‌پذیری داشته باشید و دارای عضو خنثی ۱
iii- توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع

میدان: $(F, +, \cdot)$ اگر

i- $(\mathrm{F}, +, \cdot)$ دامنه‌ای انتگرالی باشد.
ii- $(\mathrm{F} - \{0\}, \cdot)$ گروه آبلی باشد.

فضای برداری

تعریف: فضای بردار مقدار حقیقی $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ مجموعه‌ای است با دو عملیات:

$$+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

$$\cdot: \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

به‌طوری‌که

۱- $(\nu,+)$ آبلی است

۲- توزیع‌پذیری

الف- $\forall\lambda\in\mathbb{R};\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in v{:}\ \lambda.(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda.\boldsymbol{x}+\lambda.\ \boldsymbol{y}$

ب- $\forall\lambda,\psi\in\mathbb{R};\boldsymbol{x}\ \in v{:}\ (\lambda+\psi).\boldsymbol{x}=\lambda.\boldsymbol{x}+\psi.\ \boldsymbol{x}$

۳- شرکت‌پذیری $\forall\lambda,\psi\in\mathbb{R};\boldsymbol{x}\ \in v{:}\ \lambda.(\psi.\boldsymbol{x})=(\lambda\psi).\boldsymbol{x}$

۴- عضو خنثی $\forall\boldsymbol{x}\ \in v{:}\ 1.\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

فضای برداری مختلط می‌تواند پیچیده باشد ولی ساده‌ترین آن نمایش برداری از مجموعه‌ای از اعداد مختلط است. بردارهای حالت دستگاه کوانتومی و رایانه کوانتومی را توصیف می‌کنند و ساختارهای ریاضیاتی بر پایهٔ اعداد مختلط هستند. در ابتدا $\mathbb{C}^۴=\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ را به عنوان مثال نمایش می‌دهیم. یکی از اعضای آن می‌تواند بردار زیر باشد.

- $V=\begin{bmatrix} ۶-۴i \\ ۷+۳i \\ ۴.۲-۸.۱i \\ -۳i \end{bmatrix}$
- $V[۱]=۷+۳i$
- جمع دو بردار (مثال)
- جابجاپذیر $V+W=W+V$
- شرکت‌پذیر $(V+W)+X=V+(W+X)$
- تمرین-اثبات کنید.
- دارای بردار صفر و عضو خنثی V+**0**=**0**+V
- هر عضو دارای معکوس یا منفی V+(-V)=0
- گروه آبلی
  - مثلا $\mathbb{C}^۴$ با عملیات جمع و معکوس و صفر و خواص شرکت‌پذیری و جابجاپذیری گروهی آبلی است.
- دارای خواص جمع و معکوس و عدد خنثی و جمع شرکت‌پذیر و جابجاپذیر
- ضرب در مقیاس (تک عدد)
- $۱.V=V$
- $c_۱.(c_۲.V)=(c_۱c_۲).V$
- $c.(V+W)=cV+cW$
- $(c_۱+c_۲).V=c_۱V+c_۲V$
- فضای برداری مختلط: گروه آبلی با ضرب تک‌عدد پشتیبان خواص متناظرش
- تمرین نوشتن برنامهٔ توابع جمع و معکوس و ضرب تک‌عدد در $\mathbb{C}^n$

فضای برداری مختلط

تعریف فضای برداری مختلط- مجموعه ناتهی $\mathbb{V}$ به‌طوری‌که دارای سه عملیات زیر است

جمع: $+{:}\ \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$

منفی: $-: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

ضرب تک‌عدد: $\cdot: \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

و عضو خنثی (بردار صفر) است. عملیات‌های مذکور و عضو خنثی صفر خواص زیر را برآورده می‌کنند:

۱. جابجاپذیری جمع V+W = W+V
۲. شرکت‌پذیری جمع (V+W)+X=V+(W+X)
۳. صفر عضو خنثی V+0=0+V
۴. هر بردار دارای قرینه V+**0**=**0**+V
۵. $۱.V = V$
۶. $c_۱.(c_۲.V) = (c_۱c_۲).V$
۷. $c.(V + W) = cV + cW$
۸. $(c_۱ + c_۲).V = c_۱V + c_۲V$

گروه آبلی خواص ۱ و ۲ و ۳ و ۴

فضای بردار حقیقی

ضرب تک‌عدد: $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

مثال

$\mathbb{C}^n$

$\mathbb{R}^n$ فضای بردار حقیقی است.

۱. $\mathbb{R}^۳$

هندسه عدد مختلط را نمایش دادیم. به طریق اولی نمایش ابعاد بالاتر با ابرصفحات

$\mathbb{C}^{m\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m-۱,0} & \cdots & c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix}$$

جمع

$$\begin{bmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m-۱,0} & \cdots & c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{0,0} & \cdots & d_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m-۱,0} & \cdots & d_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{0,0} + d_{0,0} & \cdots & c_{0,n-۱} + d_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m-۱,0} + d_{m-۱,0} & \cdots & c_{m-۱,n-۱} + d_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix}$$

$$(C + D)[j,k] = C[j,k] + D[j,k]$$

قرینه

$$-\begin{bmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m-۱,0} & \cdots & c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{0,0} & \cdots & -c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{m-۱,0} & \cdots & -c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix}$$

ضرب تک‌عدد

$$\lambda\begin{bmatrix} c_{0,0} & \cdots & c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m-۱,0} & \cdots & c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda c_{0,0} & \cdots & \lambda c_{0,n-۱} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{m-۱,0} & \cdots & \lambda c_{m-۱,n-۱} \end{bmatrix}$$

اثبات کنید.

برنامه متناظر را بنویسید.

$n = ۱$ یعنی $\mathbb{C}^{m\times n} = \mathbb{C}^m$

$m = n$ آن‌گاه دارای سه عملیات ممکن دیگر

- ترانهاده A^T
  - $A^T[j,k] = A[k,j]$
- مزدوج $\bar{A}$
  - $\bar{A}[j,k] = \overline{A[j,k]}$

- الحاقی یا چلیپا (دگر) $A^\dagger$ ترکیب عملیات‌های ترانهاده و **مزدوج**
  - $A^\dagger[j,k] = \overline{A[k,j]}$ یا $A^\dagger = (\bar{A})^T = \overline{A^T}$

ترانهاده و مزدوج و الحاقی را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} ۶ - ۳i & ۱۲ - ۲i & ۶i \\ 0 & ۲.۵ - ۳.۱i & ۱۷ \\ ۴ & ۲ + ۵i & ۳ - ۴.۵i \end{bmatrix}$$

امکان تعریف سه عملیات بالا در حالت مربع نبودن ماتریس

خواص عملیات‌ها در $\mathbb{C}^{n\times n}$

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ حفظ خاصیت جمع
- $(c.A)^T = c.A^T$ حفظ ضرب تک‌عدد
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$ حفظ خاصیت جمع
- $\overline{c.A} = \bar{c}.\bar{A}$ حفظ ضرب تک‌عدد
- $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$
- $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- $(c.A)^\dagger = \bar{c}.A^\dagger$

تمرین- اثبات کنید.

$\mathbb{C}^{m\times n}$

ضرب ماتریسی:

$$\star: \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{n\times p} \to \mathbb{C}^{m\times p}$$

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ آنگاه $A \star B \in \mathbb{C}^{m\times p}$ به‌طوری که

۱. $(A \star B)[j,k] = \sum_{h=1}^{n}(A[j,h] \times B[h,k])$

مثال-

$$A = \begin{bmatrix} ۳+۲i & 0 & ۵-۶i \\ ۱ & ۴+۲i & i \\ ۴-i & 0 & ۴ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۵ & ۲-i & ۶-۴i \\ 0 & ۴+۵i & ۲ \\ ۷-۴i & ۲+۷i & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB[0,0] = (۳+۲i)\times(۵) + (0)\times(0) + (۵-۶i)\times(۷-۴i)$$

$$= (۱۵+۱۰i) + (0) + (۱۱-۶۲i) = ۲۶-۵۲i$$

تمرین- آیا AB=BA؟

ماتریس همانی: ماتریسی که اعضای روی قطر اصلی برابر یک و بقیه درایه‌ها صفر باشند.

خواص ضرب ماتریسی

- شرکت‌پذیری (AB)C=A(BC)
- IA=AI=Aعضو خنثی
- توزیع ضرب به جمع
  - A(B+C)=AB+AC
  - (B+C)A=BA+CA
- ضرب ماتریسیc(AB)=(cA)B=A(cB)

- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

تمرین- اثبات کنید.

جابجاپذیری خاصیتی از ضرب ماتریسی نیست. دارای اهمیت در مکانیک کوانتوم است.

تمرین- برنامه‌ای بنویسید که دو ماتریس مختلط را دریافت و ضرب آنها را ایجاد کند.

جبر مختلط فضای برداری مختلطی با ضرب ماتریسی است که چهار خاصیت اولیه را برآورده کند.

ضرب ماتریس در بردار: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{C}^n$ آن‌گاه $AB \in \mathbb{C}^n$ یا $A: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ و آن را عمل یا کنش می‌خوانیم. عمل یا کنش A بر بردارها منجر به برداری جدید می‌شود. عمل یا کنش ماتریس مورد مهمی است که در رایانش کوانتومی و مباحث پیش رو خواهیم دید.

تعریف زیرفضا: $\mathbb{V}$ زیرفضای مختلطی از $\mathbb{V}'$ است اگر مورد متقدم زیرمجموعه‌ای از متأخر باشد و

الف- $\mathbb{V}$ تحت عمل جمع بسته باشد، یا $V_1, V_2 \in \mathbb{V} \Longrightarrow V_1 + V_2 \in \mathbb{V}$

ب- $\mathbb{V}$ تحت عمل ضرب مقیاسی بسته باشد، یا $\mathrm{V} \in \mathbb{V} \Longrightarrow cV \in \mathbb{V}$

نتیجه: $\mathbb{V}$ تحت معکوس بسته است و $0 \in \mathbb{V}$.

مثال- $\mathbb{C}^9$ با مقادیر صفر در اندیس‌های سه و شش و نه زیرفضایی مختلط از $\mathbb{C}^9$ است.

مثال- چند جمله‌ای درجه n فضای بردار مختلط است. اثبات کنید.

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

$$p(x) + q(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n) + (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \cdots + (c_n + d_n)x^n$$

$$-p(x) = -c_0 - c_1 x - c_2 x^2 - \cdots - c_n x^n$$

$$cp(x) = cc_0 + cc_1 x + cc_2 x^2 + \cdots + cc_n x^n$$

مثال- چندجمله‌ای درجه ۷ زیرفضایی از چندجمله‌ای درجه ۹ است.

نگاشت خطی

تعریف نگاشت خطی: $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ دو فضای برداری مختلط هستند. نگاشت خطی از $\mathbb{V}$ به $\mathbb{V}'$ تابع $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ به‌طوری که به ازای $\mathrm{V}, V_1, V_2 \in \mathbb{V}$ و $c \in \mathbb{C}$ داریم:

$$f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$$
$$f(cV) = cf(V)$$

یا

$$f(\lambda V_1+\gamma V_2)=\lambda f(V_1)+\gamma f(V_2)$$

مثال- خطی بودن کنش ماتریس روی فضای بردار

تعریف عملگر: هر نگاشت خطی از فضای برداری مختلط به خودش $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ عملگری *روی* $\mathbb{C}^n$ *است. عملگرهای تطور حالت کوانتومی را توصیف می‌کنند و روی بردارها عمل می‌کنند. بردار را از حالتی به حالت دیگر تبدیل می‌کنند.*

ذخیره چند جمله‌ای با آرایهٔ با اندازهٔ $n+1$ پس یکسانی چندجمله‌ای درجه n با $\mathbb{C}^{n+1}$. پس می‌توان به یکسانی دو فضای برداری اشاره کرد. مفهوم زیر چنین چیزی را نمایش می‌دهد.

تعریف یک‌ریختی (ایزومورفی): دو فضای برداری $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ ایزومورفی هستند اگر و فقط اگر نگاشت خطی یک به یک $f:\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{V}'$ موجود باشد. به سخن دیگر، دو فضای برداری یک‌ریخت به معنای تغییر نام اعضا فضاهای برداری و یکسانی ساختار فضای برداری است. اساسا دو فضا یکی هستند. لازم به تذکر است که مکانیک کوانتوم دو نوع صورت دارد: موجی و ماتریسی. در نمایش ماتریسی عملگرها روی حالت‌ها اعمال می‌شوند تا تبدیلات بین حالت‌ها به دست آید.

مثال- $\mathbb{C}^{m\times n}$ یا تمامی ماتریس‌های با درایه‌های مختلط یک‌ریخت فضای بردار مختلط و فضای بردار حقیقی هستند. $\mathbb{R}^{m\times n}$ یا تمامی ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی متناظر فضای بردار حقیقی هستند.

می‌توان ازدو فضا بردار مختلط $(\mathbb{V},+,-,0,\cdot)$ و $(\mathbb{V}',+',-',0',\cdot')$ فضای بردار مختلط جدیدی را به صورت زیر ایجاد کرد.

تعریف ضرب دکارتی یا جمع مستقیم دو فضای $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$: $(\mathbb{V}\times\mathbb{V}',+'',-'',0'',\cdot'')$. $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ $(V,V')\in$ عملیات‌ها:

- $(V_1,V_1')+''(V_2,V_2')=(V_1+V_2,V_1'+'V_2')$
- $-''(V,V')=(-V,-'V')$
- $0''=(0,0')$
- $c.''(V,V')=(c.V,c.'V')$

تمرین- اثبات کنید.

- $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$ ایزومورفی $\mathbb{C}^{m+n}$ است؟
- $\mathbb{C}^m$و$\mathbb{C}^n$ هر دو زیرفضا مختلط $\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}^n$ هستند؟

پایه و بُعد

پایه فضای برداری مجموعه‌ای از بردارهاست که هر بردار عضو فضا را بتوان بر اساس آنها به صورت منحصربفردی نوشت.

تعریف **ترکیب خطی**: فضای برداری مختلط (حقیقی) $\mathbb{V}$ است. $V \in \mathbb{V}$ ترکیب خطی بردارهای $V_0, V_۱, \cdots, V_{n-۱}$ است اگر

$$V = c_0.V_0 + c_۱.V_۱ + \cdots c_{n-۱}.V_{n-۱}$$

$$c_0, c_۱, \cdots, c_{n-۱} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}) \text{ و}$$

مثال-

$$۳\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix} + ۵\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \\ ۲.۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ \\ ۸ \\ ۲۰.۵ \end{bmatrix}$$

تعریف استقلال خطی: مجموعه $V_0, V_۱, \cdots, V_{n-۱}$ در فضای برداری مستقل خطی هستند اگر

$\mathbf{0} = c_0.V_0 + c_۱.V_۱ + \cdots c_{n-۱}.V_{n-۱}$ دلالت بر $c_0 = c_۱ = \cdots = c_{n-۱} = 0$ داشته باشد.

مثال- $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$ مستقل خطی و $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}\right\}$ وابسته خطی هستند.

پایه: مجموعهٔ $B = \{V_0, V_۱, \cdots, V_{n-۱}\}$ که الف- هر بردار از فضا خطی را بتوان با ترکیبی خطی از اعضای B نوشت. ب- B مستقل خطی باشد.

مثال $\mathbb{R}^۳$- $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$

مثال- استاندارد پایه یا کانونی پایه $\mathbb{R}^۳$- $\left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ۱ \end{bmatrix}\right\}$

$\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ دارای پایه‌های E_i با اندازهٔ n است که مدخل i برابر یک و در بقیه جاها صفر. پس هر بردار $[c_0, c_۱, \cdots, c_{n-۱}]^T$ را می‌توان به صورت $\sum_{j=0}^{n-۱}(c.E_j)$ نوشت.

$$e_0 = \begin{bmatrix} ۱ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_۱ = \begin{bmatrix} 0 \\ ۱ \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_{n-۱} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}^{m\times n}$ دارای پایه‌های E_{jk} به‌طوری که دارای مقدار یک در مدخل (i,j) و صفر در بقیه مدخل‌هاست. آنگاه ماتریس A:

$$A = \sum_{j=0}^{n-۱} \sum_{k=0}^{n-۱} A[j,k].E_{jk}$$

چندجمله‌ای با درجه n: دارای پایه کانونی $۱, x, x^{۲}, \cdots, x^n$ است.

$Func(\mathbb{N},\mathbb{C})$ پایه کانونی از تعداد نامتناهی و شمارا از توابع $\mathrm{f_j}(\mathrm{j} = 0,۱,۲,\dots)$ که

$$f_j = \begin{cases} ۱, j = n \\ \text{دغا}\ 0 \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} (c_j . f_j)$$

$Func([a,b],\mathbb{C})$ پایه کانونی از تعداد نامتناهی و ناشمارا از توابع $\mathrm{f}_r, \mathrm{r} \in [\mathrm{a},\mathrm{b}] \subseteq \mathbb{R}$ که

$$f_r(x) = \begin{cases} ۱, r = x \\ \text{دغا}\ 0 \end{cases}$$

$$f = \int_a^b c_r f_r$$

ضرب دکارتی دو فضای برداری منجر به فضای برداری ترکیب هر دو فضا.

قضیه: هر پایه یک فضا برداری دارای تعداد بردارهای برابر هستند. اثبات کنید.

تعریف بعد: تعداد بردارهای پایه فضای برداری است.

مثال: $\mathbb{R}^{۳}$ دارای بعد ۳ است. $\mathbb{C}^n$ به عنوان فضا مختلط دارای بعد n است. $\mathbb{C}^n$ به عنوان فضا حقیقی دارای بعد $۲n$ است. چندجمله‌ای درجه n ایزوموفی $\mathbb{C}^{n+۱}$ و در نتیجه دارای بعد $n+۱$ است. $\mathbb{C}^{m\times n}$ به عنوان فضا مختلط دارای بعد mn است. $Func(\mathbb{N},\mathbb{C})$ دارای بعد نامتناهی شماراست. $Func([a,b],\mathbb{C})$ دارای بعد نامتناهی ناشماراست. بعد $\mathbb{V}\times\mathbb{V}'$ برابر بعد $\mathbb{V}$ به علاوهٔ بعد $\mathbb{V}'$ است.

قضیه: هر دو فضای برداری مختلط دارای بعد یکسان یک‌ریخت هستند.

در رایانش کوانتومی فضاهای برداری بعد-متناهی مدنظر است. چرا؟ پس بر $\mathbb{C}^n$ تمرکز داریم.

ماتریس تغییر پایه یا ماتریس تبدیل از پایهٔ B به پایهٔ D ماتریس $M_{D\leftarrow B}$ است به‌طوری که $V_D = M_{D\leftarrow B} V_B$

در فضای $\mathbb{R}^{۲}$ بردارهای پایه برابر

$$\left\{\begin{bmatrix}۱\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\۱\end{bmatrix}\right\}$$

هستند اما پایه دیگر ماتریس هدامرد به صورت زیر است.

$$\left\{\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\\\frac{۱}{\sqrt{۲}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}}\\-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\end{bmatrix}\right\}$$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}}\\\frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}}\end{bmatrix}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\begin{bmatrix}۱ & ۱\\۱ & -۱\end{bmatrix}$$

ماتریس مذکور دارای نقشی مهم در رایانش کوانتومی و طراحی مدارات و الگوریتم‌ها دارد. تمرین- ضرب هدامرد در خودش؟ ماتریس همانی

ضرب داخلی

حالت سیستم کوانتومی متناظر با برداری در فضای برداری مختلط است. نیاز به مقایسهٔ حالت‌های سیستم در سیستم‌های کوانتومی مورد احتیاج است. به سخن دیگر، نیاز به مقایسه بردارها و یا اندازه‌گیری برداری در مقایسه با بردار دیگری در فضای برداری اهمیت می‌یابد. عملیات ضرب داخلی زیر را در فضای $\mathbb{R}^{۳}$ در نظر بگیرید.

$$\left\langle\begin{bmatrix}۵\\۳\\-۷\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۶\\۲\\0\end{bmatrix}\right\rangle=\begin{bmatrix}۵ & ۳ & -۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۶\\۲\\0\end{bmatrix}=(۵\times۶)+(۳\times۲)+(-۷\times0)=۳۶$$

برای هر بردار دیگری در فضای حقیقی سه‌بعدی می‌توان عملیات بالا را تکرار کرد.

$$\langle V_{۱},V_{۲}\rangle=V_{۱}^{T}\star V_{۲}=\sum_{j=0}^{n-۱}r_j r_j'$$

نمونه‌ای از ضرب داخلی است.

تعریف ضرب داخلی (ضرب نقطه‌ای یا ضرب تک‌عددی) روی فضای برداری مختلط $\mathbb{V}$ تابعی

$$\langle -,-\rangle:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{C}$$

است که شرایط زیر را برای تمامی بردارهای عضو فضای برداری و برای هر عدد مختلط برآورده کند:

۱. $\langle V,V\rangle \geq 0$ و $\langle V,V\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $V = \mathbf{0}$ (تباهیدگی در زمان اینکه بردار صفر باشد)

۲. جمع

$$\langle V_۱ + V_۳, V_۲\rangle = \langle V_۱, V_۲\rangle + \langle V_۳, V_۲\rangle \text{ یا } \langle \sum_{i=0}^{n} V_i , W\rangle = \sum_{i=0}^{n}\langle V_i, W\rangle$$

$$\langle V_۱, V_۲ + V_۳\rangle = \langle V_۱, V_۲\rangle + \langle V_۱, V_۳\rangle \text{ یا } \langle W, \sum_{i=0}^{n} V_i\rangle = \sum_{i=0}^{n}\langle W, V_i\rangle$$

۳. ضرب تک‌عددی

$$\langle c.V_۱, V_۲\rangle = \bar{c} \times \langle V_۱, V_۲\rangle$$

$$\langle V_۱, c.V_۲\rangle = c \times \langle V_۱, V_۲\rangle$$

۴. پادمتقارن

$$\langle V_۱, V_۲\rangle = \overline{\langle V_۲, V_۱\rangle}$$

ضرب داخلی فضای بردار حقیقی دارای خواص یکسان با فضای بردار مختلط است و صرفا موارد سوم و چهارم ساده‌تر است.

فضای ضرب داخلی

تعریف فضای ضرب داخلی (مختلط): فضای برداری (مختلط) همراه ضرب داخلی است. مثال

$$\mathbb{R}^۳: \langle V_۱, V_۲\rangle = V_۱^T \star V_۲$$

$$\mathbb{C}^n: \langle V_۱, V_۲\rangle = V_۱^\dagger \star V_۲$$

$$\mathbb{R}^{m\times n}: \langle A, B\rangle = trace\left(A^\dagger B\right)$$

$$Func(\mathbb{N}, \mathbb{C}): \langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f(j)} g(j)$$

$$Func([a,b], \mathbb{C}): \langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

مثال-

$V_۱ = [۲,۱,۳]^T$، $V_۲ = [۶,۲,۴]^T$ و $V_۳ = [0,-۱,۲]^T$ آیا خواص جمع را حافظ است؟

$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & -۱ \\ -۱ & 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ یا خاصیت جمع ضرب داخلی را حفظ می‌کند؟

اگر $V_۱ = V_۲$، آن‌گاه $\langle V_۱, V_۱\rangle = \overline{\langle V_۱, V_۱\rangle}$، در نتیجه پاسخ عددی حقیقی خواهد بود.

با استفاده از ضرب داخلی می‌توان طول یا نرم را تعریف کرد.

طول یا نُرم: $|\ |: \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ و $|V| = \sqrt{\langle V, V\rangle}$

خواص طول عبارتند از

- غیرتباهیده است، یا $V \neq 0 \Leftarrow |V| > 0$
- تبعیت از نامساوی مثلث: $|V + W| \leq |V| + |W|$
- تبعیت از ضرب تک‌عددی: $|c \cdot V| = |c| \times |V|$

مثال-

$$|[۳ \quad -۶ \quad ۲]^T| = \sqrt{\langle [۳ \quad -۶ \quad ۲]^T, [۳ \quad -۶ \quad ۲]^T \rangle} = \sqrt{۳^۲ + (-۶)^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

$$[۴+۳, \quad ۶-۴i, \quad ۱۳i]^T$$

تمرین- $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۲\times۲}$

تعریف تابع فاصله: برای فضای ضرب داخلی مختلط $(\mathbb{V}, \langle\,,\,\rangle)$: $d(\,,\,): \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ به‌طوری که $d(V_۱, V_۲) = |V_۱ - V_۲| = \sqrt{\langle V_۱ - V_۲, V_۱ - V_۲ \rangle}$

که شهود فاصله انتهای بردار اول از انتهای بردار دوم است. تابع فاصله دارای ویژگی‌های زیر است.

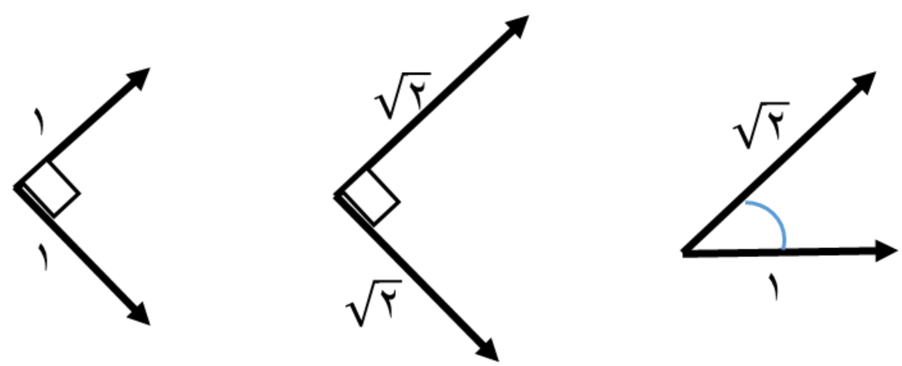
- غیرتباهیده است، یا اگر $V \neq W$ آن‌گاه $d(V, W) > 0$.
- تبعیت از نامساوی مثلث، $d(U, V) \leq d(U, W) + d(W, V)$.
- متقارن است $d(V, W) = d(W, V)$.

تعریف متعامد: دو بردار متعامدند اگر $\langle V_۱, V_۲ \rangle = 0$.

تعریف پایه متعامد: پایهٔ $B = \{V_0, V_۱, \cdots, V_{n-۱}\}$ فضای ضرب داخلی که هر جفت بردار متعامد باشند. پایه متعامد نرمال است اگر نرم هر بردار یک باشد.

$$\langle V_j, V_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ ۱, j = k \end{cases}$$

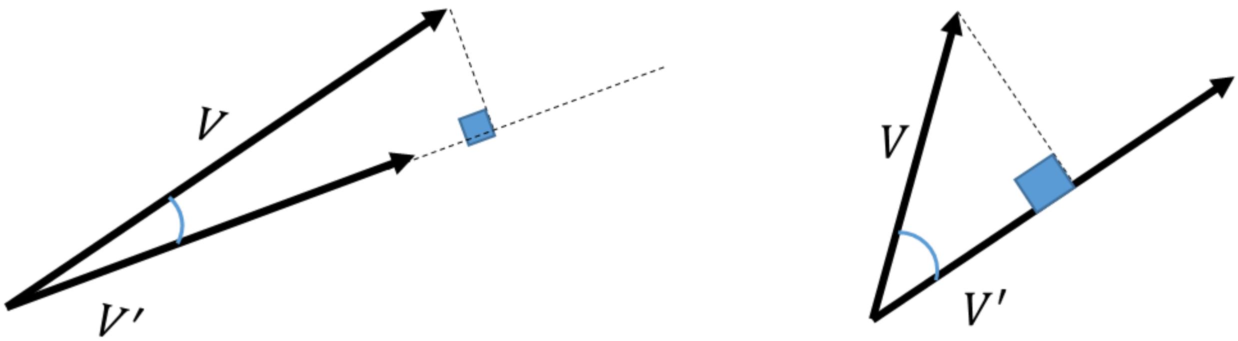
δ_{jk} تابع دلتای کرانکار می‌خوانند.



شکل ۱ نامتعامد- متعامد -متعامد نرمال

ضرب داخلی در فضای سه‌بعدی: $\langle V_۱, V_۲ \rangle = |V_۱||V_۲| \cos\theta$

در صورتی که طول بردار یک باشد. ضرب داخلی بردار دیگر در آن طول تصویر روی آن را نشان می‌دهد.



شکل ۲ تصویر V بر V'

$$V = [r0, r1, r2]^T$$

$$V = \langle E_0, V\rangle E_0 + \langle E_۱, V\rangle E_۱ + \langle E_۲, V\rangle E_۲$$

$$= \langle[۱,0,0]^T, V\rangle[۱,0,0]^T + \langle[0,۱,0]^T, V\rangle[0,۱,0]^T + \langle[0,0,۱]^T, V\rangle[0,0,۱]^T$$

پس $\langle V, V'\rangle . V'$ بردار V' کشیده (یا فشرده) می‌شود تا تصویر بردار V را قطع کند.

$$V = \sum_{j=0}^{n-۱}\langle E_j, V\rangle E_j$$

دنباله کوشی: در فضای ضرب داخلی $\mathbb{V}, \langle , \rangle$ با دنباله‌ای از بردارها $V_0, V_۱, V_۲, \ldots$ است که:

$$\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(V_m, V_n) \leq \epsilon$$

تعریف تمام (کامل): فضای ضرب داخلی مختلط تمام است اگر دنباله کوشی وجود داشته باشد که

$$\lim_{n\to\infty} |V_n - \bar{V}| = 0$$

تعریف فضای هیلبرت: فضای ضرب داخلی مختلط تمام است.

شهود: فضای هیلبرت مفهومی ریاضی در تحلیل تابعی و مکانیک کوانتوم است که تعمیم فاصله اقلیدسی به فضای بعد-نامتناهی است. بنابراین، فضای هیلبرت را می‌توان فضائی در نظر گرفت که بردارهایی قرار دارند و قادر به انجام هر عملیاتی بود که در فضای سه‌بعدی روی بردارها ممکن است. حال فضای هیلبرت ممکن است بردارهایی با تعداد درایه‌های نامتناهی باشند و همچنین کاملا مجرد و انتزاعی مانند تابع موج کوانتوم باشند. خاصیت مهم فضای هیلبرت دارا بودن ضرب داخلی است که اجازه به داوری درباره زاویه و طول بردارها را صادر می‌کند. ضرب داخلی

(همانند فضای سه‌بعدی) مفهوم متعامد بودن و تصویر (پراجکشن) را پشتیبانی می‌کند. به سخن دیگر تعریفی از فاصله یا سنجه را در اختیار می‌نهد.

قضیه: هر ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط بعد-متناهی خودبخود تمام است. در نتیجه هر فضای بردار مختلط بعد-متناهی با ضرب داخلی فضای هیلبرت است.

ویژه‌مقدار و ویژه‌بردار

تعریف: ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، عددی $c \in \mathbb{C}$ و بردار $V \neq 0$ وجود دارد که $Ax = c.x$، c ویژه مقدار A و $\boldsymbol{x}$ ویژه‌بردار A متناظر با c خوانده می‌شود.

$$A\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x}$$

$$(A - cI)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{c}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ |M| = 0\end{array}\right\} M\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$|A - cI| = \mathbf{0}$$

مثال

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \left|\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} ۱ & 0 \\ 0 & ۱ \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| =$$
$$\begin{vmatrix} ۲-\lambda & ۲ \\ ۵ & -۱-\lambda \end{vmatrix} = (۲-\lambda)(-۱-\lambda) - ۱۰ = \lambda^۲ - \lambda - ۱۲ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_۱ = -۳ \\ \lambda_۲ = ۴ \end{cases}$$

$$\lambda_۱ = -۳ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = \lambda_۱ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x_۱ + ۲x_۲ \\ ۵x_۱ - x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳x_۱ \\ -۳x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = -۳x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = -۳x_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = -۳x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = -۳x_۲ \end{cases} \Rightarrow ۵x_۱ = -۲x_۲ \Rightarrow p_۱ = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲ = ۴ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x_۱ + ۲x_۲ \\ ۵x_۱ - x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x_۱ \\ ۴x_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۴x_۱ \\ ۵x_۱ - x_۲ = ۴x_۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱ = x_۲ \Rightarrow p_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

فرض A ماتریسی با ویژه‌مقدار c_0 با ویژه‌بردار V_0 است. آنگاه به ازای هر عدد مختلط داریم:

$$A(cV_0) = cAV_0 = cc_0V_0 = c_0(cV_0),$$
$$A(cV_0 + c'V_0) = AcV_0 + Ac'V_0$$
$$= cAV_0 + c'AV_0 = c(c_0V_0) + c'(c_0V_0)$$
$$= (c + c')(c_0V_0) = c_0(c + c')V_0$$

تمرین- جمع دو ویژه‌بردارْ ویژه‌بردار است؟

تعریف ویژه‌فضا: هر ویژه‌بردار فضای زیربردار مختلطِ فضای برداری را مشخص می‌کند.

ماتریس‌های هرمیتی و یگانی

تقارن $A^T = A$

هرمیتی $A^\dagger = A$

تعریف خودالحاقی: اگر ماتریسی هرمیتی باشد، عملگر نشان‌دهندهٔ آن خودالحاقی خوانده می‌شود.

تمرین ماتریس A هرمیتی است اگر $A^T = \bar{A}$

قضیه: اگر A ماتریس هرمیتی $n \times n$ باشد، آن‌گاه $\langle AV, V' \rangle = \langle V, AV' \rangle$.

اثبات-

$$\langle AV, V' \rangle = (AV)^\dagger V' = V^\dagger A^\dagger V' = V^\dagger (AV') = \langle V, AV' \rangle$$

قضیه: اگر ماتریسی هرمیتی باشد، آن‌گاه تمامی ویژه‌مقدارها حقیقی هستند.

اثبات-فرض A ماتریس هرمیتی با ویژه‌مقدار c و ویژه‌بردار V باشد. حال داریم:

$$\bar{c}\langle V, V \rangle = \langle cV, V \rangle = \langle AV, V \rangle = \langle V, AV \rangle = \langle V, cV \rangle = c\langle V, V \rangle$$

پس $\bar{c} = c$.

تمرین- اثبات کنید ویژه مقدارهای ماتریس متقارن حقیقی است.

قضیه: در ماتریس هرمیتی دلخواه، ویژه‌بردارهای متمایز که ویژه‌مقدارهای متمایز دارند متعامدند.

اثبات- فرض دو ویژه‌مقدار با دو ویژه‌بردار متمایز ماتریس A به صورت زیر باشند.

$$AV_1 = c_1 V_1, AV_2 = c_2 V_2$$

$$\overline{c_1}\langle V_1, V_2 \rangle =? c_1 \langle V_1, V_2 \rangle = \langle c_1 V_1, V_2 \rangle = \langle AV_1, V_2 \rangle = \langle V_1, AV_2 \rangle = \langle V_1, c_2 V_2 \rangle = c_2 \langle V_1, V_2 \rangle$$

$$c_1 \langle V_1, V_2 \rangle - c_2 \langle V_1, V_2 \rangle = (c_1 - c_2)\langle V_1, V_2 \rangle = 0$$

و $c_1 - c_2 \neq 0$ پس حکم برقرار است.

تعریف ماتریس قطری:

قضیه طیف عملگرهای خودالحاقی بعد-متناهی: هر ماتریس خودالحاقی بعد-متناهی را می‌توان با ماتریس قطری نمایش داد به‌طوری که مقادیر روی قطر اصلی ویژه‌مقدارهای A هستند و ویژه‌بردارهای پایه‌های نرمال‌متعامد فضای برداری هستند.

برنامه تایید هرمیتی بودن را بنویسید.

ماتریس‌های معکوس‌پذیر $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

یکی از انواع ماتریس‌های یگانی «ماتریس‌های یگانی» هستند و معکوس آنها الحاقی آنهاست. بنابراین هندسه را حفظ می‌کنند.

تعریف ماتریس یگانی $U_{n\times n}$: $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I$ یا $U^{\dagger} = U^{-۱}$

همه ماتریس‌های معکوس‌پذیر یگانی نیستند.

مثال-

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

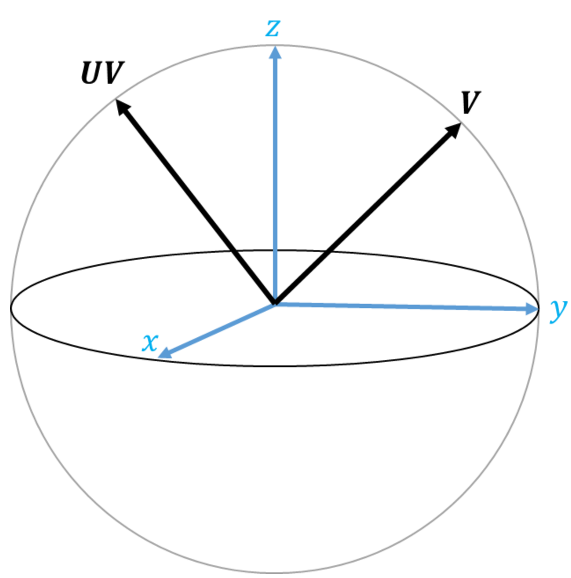
$$\begin{bmatrix} \frac{۱+i}{۲} & \frac{i}{\sqrt{۳}} & \frac{۳+i}{۲\sqrt{۱۵}} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{\sqrt{۳}} & \frac{۴+۳i}{۲\sqrt{۱۵}} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{-i}{\sqrt{۳}} & \frac{۵i}{۲\sqrt{۱۵}} \end{bmatrix}$$

قضیه: اگر U یگانی باشد، آن‌گاه $\mathrm{V}, \mathrm{V}' \in C^n$ آن‌گاه $\langle UV, UV'\rangle = \langle V, V'\rangle$ ماتریس‌های یگانی ضرب داخلی را حفظ می‌کنند.

اثبات- $\langle UV, UV'\rangle = (UV)^{\dagger}UV' = V^{\dagger}IV' = V^{\dagger}V' = \langle V, V'\rangle$

حافظ طول است $|V| = \sqrt{\langle V, V\rangle} = \sqrt{\langle UV, UV\rangle} = |UV|$.

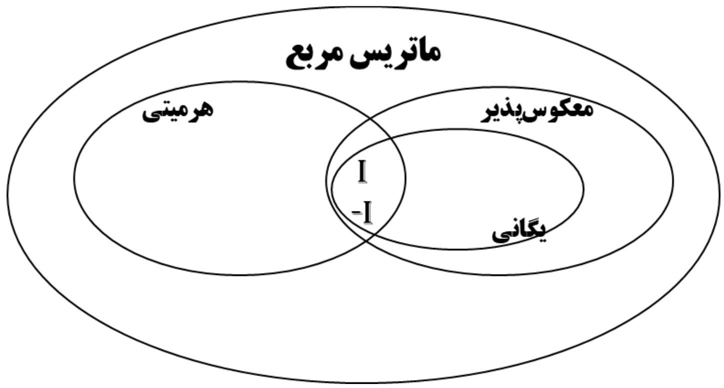
اگر $|V| = ۱$ آن‌گاه $|UV| = ۱$، تمامی بردارهای با طول یک کره‌ای را حول مبدا شکل می‌دهند. کره واحد زیر را ببینید. در واقع ماتریس یگانی روشی جهت چرخش کره واحد است.



شکل ۳ کره واحد و کنش U بر V

ماتریس هرمیتی و یگانی اهمیت فراوانی در رایانش کوانتومی دارند.

تمرین- $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ یگانی است؟



تمرین- $\mathrm{d}(\mathrm{UV}_۱,\mathrm{UV}_۲)=\mathrm{d}(\mathrm{V}_۱,\mathrm{V}_۲)$ خاصیت ایزومتری است؟

تمرین- همانی و قرینه همانی هرمیتی و یگانی هستند.

تمرین- برنامه بررسی یگانی بودن ماتریس ورودی را بنویسید.

تنسور

ضرب تنسوری مفهومی غامض و سخت پراهمیت است. همانطور که ضرب دکارتی از روش‌های ترکیب فضای برداری است، ضرب تنسوری نیز روش دیگر و حتی مهم‌تر در ترکیب فضای برداری است و در نتیجه عملیات اصلی در سیستم‌های کوانتومی است.

دو فضای برداری $\mathbb{V}$ و $\mathbb{V}'$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $\mathbb{V}$ توصیف سیستم کوانتومی و $\mathbb{V}'$ توصیف سیستم کوانتومی دیگر $\Longleftarrow$ ضرب تنسوری آنها توصیف هر دو به عنوان یک سیستم کوانتومی است. ضرب تنسوری دو فضای برداری $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}'$

$$\{\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}' | V\in\mathbb{V}, V'\in\mathbb{V}'\}$$

هر عضو آن به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$c_0.(V_0\otimes V_0')+c_۱.(V_۱\otimes V_۱')+\cdots c_{p-۱}.(V_{p-۱}\otimes V_{p-۱}')$$

$$\sum_{i=0}^{p-۱} c_i.(V_i\otimes V_i')$$

عملیات‌های فضای برداری

جمع

$$\left(V_i + V_j\right) \otimes V_k' = V_i \otimes V_k' + V_j \otimes V_k'$$

$$V_i \otimes \left(V_j' + V_k'\right) = V_i \otimes V_j' + V_i \otimes V_k'$$

ضرب تک‌عدد $\mathrm{c}.\left(V_i \otimes V_k'\right) = (c.V_i) \otimes V_k' = V_i \otimes (c.V_k')$

پایه‌ها

$\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ ایزومورفی $\mathbb{C}^{m\times n}$ است

ضرب تنسوری بردارها

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0.\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_1.\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_2.\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ a_3.\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_0 b_2 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_0 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_0 \\ a_3 b_1 \\ a_3 b_2 \end{bmatrix}$$

کوچکتر بودن $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ از $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$

جداپذیر: بردار حاصل از ضرب تنسور دو بردار باشد.

مثال- $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 9 \end{bmatrix} \in C^6 = C^2 \otimes C^3$

درهم‌آمیخته: برداری که نتوان از حاصل دو بردار بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa \\ xb \\ xc \\ ya \\ yb \\ yc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^6 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix}۸\\0\\0\\0\\0\\۱۸\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}۸\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\۶\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\0\\۳\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}-۱\\2\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}۳\\۴\\۷\end{bmatrix}$؟

$$[۵,۶,۳,۲,0,۱]^T$$

ضرب تنسوری دو ماتریس $\otimes: \mathbb{C}^{m\times m'} \otimes \mathbb{C}^{n\times n'} \to \mathbb{C}^{mn\times m'n'}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{0۱} \\ a_{۱0} & a_{۱۱} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{0۱} & b_{0۲} \\ b_{۱0} & b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲0} & b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{00}\begin{bmatrix} b_{00} & b_{0۱} & b_{0۲} \\ b_{۱0} & b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲0} & b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix} & a_{0۱}\begin{bmatrix} b_{00} & b_{0۱} & b_{0۲} \\ b_{۱0} & b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲0} & b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix} \\ a_{۱0}\begin{bmatrix} b_{00} & b_{0۱} & b_{0۲} \\ b_{۱0} & b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲0} & b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix} & a_{۱۱}\begin{bmatrix} b_{00} & b_{0۱} & b_{0۲} \\ b_{۱0} & b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲0} & b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{00}b_{00} & a_{00}b_{0۱} & a_{00}b_{0۲} & a_{0۱}b_{00} & a_{0۱}b_{0۱} & a_{0۱}b_{0۲} \\ a_{00}b_{۱0} & a_{00}b_{۱۱} & a_{00}b_{۱۲} & a_{0۱}b_{۱0} & a_{0۱}b_{۱۱} & a_{0۱}b_{۱۲} \\ a_{00}b_{۲0} & a_{00}b_{۲۱} & a_{00}b_{۲۲} & a_{0۱}b_{۲0} & a_{0۱}b_{۲۱} & a_{0۱}b_{۲۲} \\ a_{۱0}b_{00} & a_{۱0}b_{0۱} & a_{۱0}b_{0۲} & a_{۱۱}b_{00} & a_{۱۱}b_{0۱} & a_{۱۱}b_{0۲} \\ a_{۱0}b_{۱0} & a_{۱0}b_{۱۱} & a_{۱0}b_{۱۲} & a_{۱۱}b_{۱0} & a_{۱۱}b_{۱۱} & a_{۱۱}b_{۱۲} \\ a_{۱0}b_{۲0} & a_{۱0}b_{۲۱} & a_{۱0}b_{۲۲} & a_{۱۱}b_{۲0} & a_{۱۱}b_{۲۱} & a_{۱۱}b_{۲۲} \end{bmatrix}$$

ویژگی‌ها

- $(A \otimes B)[j,k] = A\left[\frac{j}{n},\frac{k}{m}\right] \times B[j\%n, k\%m]$
- تقریبا جابجاپذیر
- شرکت‌پذیر

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$$

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes \mathrm{B}^\dagger$$

$$(AA') \otimes (BB') = (A \otimes B)(A' \otimes B')$$

$$(A \otimes B)(V \otimes V') = (AV) \otimes (BV')$$

تمرین- اثبات کنید.

تمرین- برنامه ضرب تنسوری را بنویسید.

منابع- شنکار، یانوفسکی